

波及効果の求め方-例題

～第1次波及効果まで～

下記のような構造の産業連関表があるとする。
産業2の最終需要が50%増加したとき、産業1と産業2の生産額はそれぞれどのようになるか

		中間需要		最終需要	生産額
		産業1	産業2		
中間投入	産業1	40	30	30	100
	産業2	20	40	40	100
粗付加価値		40	30		
生産額		100	100		

波及効果の求め方-例題(続き)

～第1次波及効果まで～

解法
まず、投入係数を求める。

		投入係数	
		産業1	産業2
中間投入	産業1	0.4	0.3
	産業2	0.2	0.4
粗付加価値		0.4	0.3
生産額		1	1

波及効果の求め方-例題(続き)

～第1次波及効果まで～

解法

次に、連立方程式を作成する。

先ほど作成した投入係数を利用するとともに、産業1の生産額をX1、産業2の生産額をX2とすると

当初

$$\begin{cases} X1 = 0.4X1 + 0.3X2 + 30 \\ X2 = 0.2X1 + 0.4X2 + 40 \end{cases}$$

今回は

$$\begin{cases} X1 = 0.4X1 + 0.3X2 + 30 \\ X2 = 0.2X1 + 0.4X2 + 60 \end{cases}$$

これを解くと

$$X1 = 120$$

$$X2 = 140 \text{ となる}$$

波及効果の求め方-例題(続き)

～第1次波及効果まで～

		中間需要		最終需要	生産額
		産業1	産業2		
中間投入	産業1	40	30	30	100
	産業2	20	40	40	100
粗付加価値		40	30		
生産額		100	100		

産業2の最終需要が50%増加する(60になる)と、産業1の生産額は120(20の増加)、産業2の生産額は140(40の増加)となった。

産業2の需要が20増えると、生産額が合計60増加した。
経済波及効果は3倍である。

波及効果の求め方-行列

～第1次波及効果まで～

		中間需要		最終需要	生産額
		産業1	産業2		
中間投入	産業1	40	30	30	100
	産業2	20	40	40	100
粗付加価値		40	30		
生産額		100	100		

これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} X1 = 0.4X1 + 0.3X2 + 30 \\ X2 = 0.2X1 + 0.4X2 + 40 \end{array} \right.$$

X1とX2を左辺に移項

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0.6X1 - 0.3X2 = 30 \\ -0.2X1 + 0.6X2 = 40 \end{array} \right.$$

波及効果の求め方-行列(続き)

～第1次波及効果まで～

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

左から両辺に逆行列を掛ける

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

波及効果の求め方-行列例題

～第1次波及効果まで～

先の例題なら

需要が変化した時のそれぞれの生産額

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$$

需要増に伴い増加した生産額を知りたい

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

需要が20増えると、生産額が合計60増加した。

経済波及効果
の求め方



波及効果の求め方-行列未使用

～第1次波及効果まで～

		中間需要		最終需要	生産額
		産業1	産業2		
中間投入	産業1	40	30	30	100
	産業2	20	40	40	100
粗付加価値		40	30		
生産額		100	100		

産業2の最終需要20増加

産業2の生産を20する必要がある。

産業2を20生産するために必要な材料は？

産業2の投入構造から、産業1は6、産業2が8必要となることがわかる。

波及効果の求め方-行列未使用(続き) ～第1次波及効果まで～

		中間需要		最終需要	生産額
		産業1	産業2		
中間投入	産業1	40	30	30	100
	産業2	20	40	40	100
粗付加価値		40	30		
生産額		100	100		

産業1は6, 産業2が8必要となる

産業1は6, 産業2はさらに8生産する必要が生じる
再び投入構造から

産業1を6生産するために, 産業1は2.4, 産業2は1.2材料が必要
産業2を8生産するために, 産業1は2.4, 産業2は3.2材料が必要。

産業1を6, 産業2を8生産するためには, 産業1が4.8, 産業2が4.4必要。

波及効果の求め方-行列未使用(続き) ～第1次波及効果まで～

$$X_1 = \quad + 6 + (2.4 + 2.4) + \dots$$

$$X_2 = 20 + 8 + (1.2 + 3.2) + \dots$$

やがて収束し, X_1, X_2 が定まる。

ここからはやはり行列を使用する。表現が容易となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\textcircled{1} X = F + AF + A^2F + \dots$$

①の両辺にAを掛けて

$$\textcircled{2} AX = AF + A^2F + A^3F + \dots$$

①から②を引く

$$X - AX = F + A^\infty F \quad \text{※} A^\infty = A^{\infty+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)X = F$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

波及効果の求め方

～第1次波及効果まで～

$$(I - A)X = F$$

左から両辺に逆行列を掛ける

$$(I - A)^{-1}(I - A)X = (I - A)^{-1}F$$

$$X = (I - A)^{-1}F$$

↑ 今回の例での経済波及効果の求め方の一般的な数式

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

波及効果の求め方-例題

～第2次波及効果～

		中間需要		最終需要		生産額
		産業1	産業2	消費	投資	
中間投入	産業1	40	30	10	20	100
	産業2	20	40	20	20	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20			
	営業余剰	20	10			
生産額		100	100			

第2次波及効果は、直接効果および第1次波及効果により増加した雇用者所得のうち、消費にまわり新たに発生する生産増加であった。

先の問題で、産業2の最終需要が20増加したとき、産業1の生産額は20、産業2の生産額は40の増加となった。

このとき、上記構造の産業連関表において、産業1、産業2それぞれ雇用者所得はいくら発生するか。

また、発生した雇用者所得により、再び消費が発生するものとしたとき、産業1、産業2それぞれいくら消費が発生するか。ただし、消費は雇用者所得の半分が充てられるとする。

さらに、消費によって発生した生産額を求めよ。

波及効果の求め方-例題(続き)

～第2次波及効果～

解法

やはり最初に投入係数を求める。

※新たに粗付加価値の内訳が示されている。

		投入係数	
		産業1	産業2
中間投入	産業1	0.4	0.3
	産業2	0.2	0.4
粗付加価値	雇用者所得	0.2	0.2
	営業余剰	0.2	0.1
生産額		1	1

産業1は生産額が20増加していたことから、雇用者所得は4発生
産業2は生産額が40増加していたことから、雇用者所得は8発生

計12の雇用者所得が発生。問題の条件より、半分の6が消費にまわることがわかる。

波及効果の求め方-例題(続き)

～第2次波及効果～

		中間需要		最終需要		生産額
		産業1	産業2	消費	投資	
中間投入	産業1	40	30	10	20	100
	産業2	20	40	20	20	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20			
	営業余剰	20	10			
生産額		100	100			

消費が6発生することがわかった。その消費は産業1, 産業2とそれぞれどれだけ消費が発生するか。

産業連関表の消費構造を捉える。

産業1は2, 産業2は4消費が発生することがわかる。

波及効果の求め方-例題(続き)

～第2次波及効果～

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9.3 \end{pmatrix}$$

産業1と産業2の消費増加により、産業1の生産は8増加し、産業2の生産は9.3の増加となった。

直接効果と第1次波及効果:産業2の需要が20増により、生産額が60増
第2次波及効果:生産額が60増により生じた消費増で17.3の生産額の増
経済波及効果:20の需要増で77.3の生産額の増 **経済波及効果約3.9倍**

波及効果の求め方(例題2)

～移輸入を考慮～

	中間需要		最終需要			(控除) 移輸入	生産額	
	産業1	産業2	消費	投資	移輸出			
中間投入	産業1	40	30	10	20	20	-20	100
	産業2	20	40	20	10	70	-60	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20					
	営業余剰	20	10					
生産額	100	100						

上記のような構造の産業連関表があるとする。

産業2の最終需要が20増加したとき、**域内**の経済波及効果はどのようになるか。

※上記のような構造は、域内生産分が域内で使用されず域外に移輸出されていることが明らかで、それにより域内需要合計(今回なら中間需要+消費+投資)が満たせないことが発生したときに、移輸入で不足分の域内需要を補うときや、域外から移輸入されていることが明らかで、移輸入分と生産分で域内需要を上回った分が移輸出される、といった状態が考えられる。

産業がサービスの場合は、域外の人が域内でサービスを利用すれば移輸出に計上され、生産額と需要合計(中間需要+最終需要)の差が移輸入と考えられる。

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮～

		中間需要		最終需要			(控除) 移輸入	生産額
		産業1	産業2	消費	投資	移輸出		
中間投入	産業1	40	30	10	20	20	-20	100
	産業2	20	40	20	10	70	-60	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20					
	営業余剰	20	10					
生産額		100	100					

産業2の最終需要20増加

最初の例題同様、産業2の生産を20するのか？

移輸入が存在することから、域内で全てを生産するとは考えにくい。

では実際にどれだけ生産するのか？

これだけの情報では、自給率に比例し生産すると考えることが適切である。

※地域表には輸入表がなく詳細を求められないため、上記の考え方となる。

産業2の自給率は？

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮～

		中間需要		最終需要			(控除) 移輸入	生産額
		産業1	産業2	消費	投資	移輸出		
中間投入	産業1	40	30	10	20	20	-20	100
	産業2	20	40	20	10	70	-60	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20					
	営業余剰	20	10					
生産額		100	100					

産業2の自給率は？

まず、自給率の求め方を記載

$$\text{自給率} = 1 - \frac{|\text{(控除) 移輸入}|}{\text{域内需要合計}}$$

※調整項が域内需要合計に含まれることがあれば、域内需要合計から除く必要がある。

域内需要合計は、

中間需要と最終需要から移輸出を除いたものの合計である。

産業2の域内需要合計は？

$$20 + 40 + 20 + 10 = 90$$

産業2の自給率は？

$$\text{産業2の自給率} = 1 - \frac{|-60|}{90} = 0.3$$

波及効果の求め方-例題2(続き)

～移輸入を考慮～

産業2の自給率は0.3とわかった。

産業2の需要が20増加したとき、域内での生産増加は6.6となる。

産業2を6.6生産するために必要な材料は？

投入構造を捉えるが、**域内分**を考慮する場合、投入構造にも自給率を乗じる必要がある。

産業1の自給率は0.8、産業2の自給率は0.3である。

		投入係数	
		産業1	産業2
中間投入	産業1	0.4	0.3
	産業2	0.2	0.4
粗付加価値	雇用者所得	0.2	0.2
	営業余剰	0.2	0.1
生産額		1	1

材料に自給率を乗じる

波及効果の求め方-例題2(続き)

～移輸入を考慮～

域内を考慮した投入係数は

		投入係数	
		産業1	産業2
中間投入	産業1	0.8×0.4	0.8×0.3
	産業2	0.3×0.2	0.3×0.4

これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

となり、自給率は上記のように行列で表すことができる。

これが域内分の投入係数で、

(I-M)Aで表記される。 ※(I-M)が自給率の行列

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮～

域内分の生産額は

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \dots$$

自給率の行列は対角行列であることから、①の数式で表せる。

$$\textcircled{1} \quad X = (I - M)F + (I - M)^2AF + (I - M)^3A^2F + \dots$$

①の両辺に(I-M)Aを掛けて

$$\textcircled{2} \quad (I - M)AX = (I - M)^2AF + (I - M)^3A^2F + (I - M)^4A^3F + \dots$$

①から②を引く

$$X - (I - M)AX = (I - M)F$$

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮～

$$X - (I - M)AX = (I - M)F$$

$$(I - (I - M)A)X = (I - M)F$$

左から両辺に逆行列を掛ける

$$(I - (I - M)A)^{-1}(I - (I - M)A)X = (I - (I - M)A)^{-1}(I - M)F$$

$$X = (I - (I - M)A)^{-1}(I - M)F$$

↑ 移輸入を考慮した経済波及効果の求め方の一般的な数式

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 7.9 \end{pmatrix} \quad \text{※小数点第2位を四捨五入}$$

需要が20増えると、生産額が約10.7増加した。経済波及効果約0.5倍
※自給率が低い産業に新たな需要が発生しても、域外に漏れてしまう。

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮・第2次波及効果～

		中間需要		最終需要			(控除) 移輸入	生産額
		産業1	産業2	消費	投資	移輸出		
中間投入	産業1	40	30	10	20	20	-20	100
	産業2	20	40	20	10	70	-60	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20					
	営業余剰	20	10					
生産額		100	100					

先の問題で、産業2の最終需要が20増加したとき、産業1の生産額は2.8、産業2の生産額は7.9の増加となった。

このとき、上記構造の産業連関表において、産業1、産業2それぞれ雇用者所得はいくら発生するか。

また、発生した雇用者所得により、再び消費が発生するものとしたとき、産業1、産業2それぞれいくら消費が発生するか。ただし、消費は雇用者所得の半分が充てられるとする。

さらに、消費によって発生した生産額を求めよ。

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮・第2次波及効果～

解法

投入係数を利用。

		投入係数	
		産業1	産業2
中間投入	産業1	0.4	0.3
	産業2	0.2	0.4
粗付加価値	雇用者所得	0.2	0.2
	営業余剰	0.2	0.1
生産額		1	1

産業1は生産額が2.8増加していたことから、雇用者所得は0.56発生
産業2は生産額が7.9増加していたことから、雇用者所得は1.58発生

計約 2.14の雇用者所得が発生。問題の条件より、半分の1.07が消費にまわることがわかる。

波及効果の求め方-例題2(続き) ～移輸入を考慮・第2次波及効果～

		中間需要		最終需要			(控除) 移輸入	生産額
		産業1	産業2	消費	投資	移輸出		
中間投入	産業1	40	30	10	20	20	-20	100
	産業2	20	40	20	10	70	-60	100
粗付加価値	雇用者所得	20	20					
	営業余剰	20	10					
生産額		100	100					

3.2 の消費のうち、消費構成により産業1と産業2に消費が分けられる。

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.07 \times 0.3 \\ 1.07 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.32 \end{pmatrix} \quad \text{※小数点第3位を四捨五入} \quad \text{産業1と産業2の消費額}$$

産業1と産業2の消費増加により、産業1の生産0.53増加し、産業2の生産は0.32の増加となった。

直接効果と第1次波及効果：産業2の需要が20増により、生産額が約10.7増

第2次波及効果：生産額増により生じた消費増で約0.8の生産額の増

経済波及効果：20の需要増で約11.5の生産額の増 **経済波及効果約0.6倍**

※詳しい計算はエクセルファイルを確認ください。

波及効果の求め方-まとめ

- ・移輸入を考慮すると波及効果の倍率は低下する。
- ※地域産業連関表では、**逆行列は $(I - (I - M)A)^{-1}$ を使用することが一般的である。**

そのためM(移輸入)の値次第で結果は大きく変わる。

ご意見等ありましたら福岡市統計調査課までご連絡ください。

TEL:092-711-4081

E-mail: tokeichosa.GAPB@city.fukuoka.lg.jp